УДК: 517.988.8

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СВОЙСТВАХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К b-БАЗИСУ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М.И.ИСМАЙЛОВ
Бакинский Государственный Университет
miqdadismailov1@rambler.ru

В работе рассматриваются близкие, в определенном смысле, системы. Установлены обобщения некоторых известных результатов о близких системах в гильбертовых и банаховых пространствах. Получены условия, при которых система, близкая к b-базису, образует b-базис, изоморфный данному. В частности, обобщается известный результат о базисах Рисса.

Ключевые слова: b-базис, b-минимальность, b-полнота

Как известно, близость систем в некотором смысле дает возможность, благодаря базисным свойствам одной системы, ввести изучение базисных свойств другой системы. Эта теория подробно освящена в трудах [1-6]. В [1] рассмотрены близкие системы в гильбертовом пространстве $L_2(a,b)$, где доказана теорема об образовании базиса Рисса ω-линейно независимой системы, квадратично близкой к ортонормированному базису. В дальнейшем эти результаты были обобщены на абстрактные гильбертовые пространства. В этом направлении известны результаты Пели-Винера и результаты об изоморфности p-близких систем. В работе [6] приводится банаховый вариант этих результатов.

В настоящей статье с помощью билинейного отображения вводятся некоторые понятия, которые являются обобщениями соответствующих классических понятий. Получены обобщения вышеуказанных результатов.

1. Некоторые понятия и вспомогательные предложения

Пусть X, Y и Z – B-пространства с соответствующими нормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ и $\|\cdot\|_Z$, $b(x,y): X\times Y \to Z$ – билинейное отображение:

$$\|xy\|_Z \le M\|x\|_X\|y\|_Y, \tag{1}$$

где $M>0$ - некоторая постоянная, $xy \equiv b(x,y)$, $x\in X$, $y \in Y$.

Для произвольного множества $M\subset Y$ через $L_b(M)$ обозначим совокупность всевозможных конечных сумм $\sum x_i m_i$, где $x_i \in X$, $m_i \in M$.

Множество $L_b(M)$ назовем b-линейной оболочкой множества M.

Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ назовем b-полной, если $\overline{L_b(\{y_n\}_{n\in N})} = Z$.

Системы $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ назовем b- биортогональными, если

$$\forall k,n \in N,\ x\in X \quad y_n^*(xy_k) = \delta_{nk}\, x,$$

где δ_{nk} - символ Кронекера. При этом систему $\{y_n^*\}_{n\in N}$ назовем b- биортогональной системой к системе $\{y_n\}_{n\in N}$.

Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ назовем b-минимальной, если

$$\forall x\in X \ \ (x\neq 0),\ \ k\in N \quad xy_k \notin \overline{L_b(\{y_n\}_{n\in N, n\neq k})}.$$

Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ назовем b-инвариантной в Z, если
Из $\sum\limits_n x_n y_n = 0$ следует, что $\sum\limits_n f(y_n)x_n = 0$, $\forall f\in Y^*$,
где Y^* - сопряженное к Y пространство.

Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ назовем b-базисом в Z, если каждый $z\in Z$ однозначно представим в виде $z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $x_n\in X$, $n\in N$.

Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ назовем ω_b-линейно независимой в Z, если из $\sum\limits_n x_n y_n = 0$ следует, что $x_n = 0 \ \forall n\in N$.

Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ с b- биортогональной $\{y_n^*\}_{n\in N}$ назовем b-компактной в Z, если $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset Q(Z,X)$, где $Q(Z,X)$ – подпространство компактных операторов пространства $L(Z,X)$.

Системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ и $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ назовем b-изоморфными, если существует ограниченный обратимый оператор $T\in L(Z)$: $T(x\varphi_n) = x\psi_n$ $\forall x\in X$, $n\in N$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. Пусть X, Y и Z – B-пространства, система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b-базис в Z с b-биортогональной системой $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$, $F\in L(Z)$ – фредгольмовый оператор, система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ b-инвариантна в Z и $F(x\varphi_n) = x\psi_n$ $\forall x\in X$, $n\in N$. Тогда следующие свойства эквивалентны:

a) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-полна в Z;

b) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-минимальна в Z;

c) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ ω_b-линейно независима в Z;

d) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ образует b-базис в Z, b-изоморфный к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Доказательство. Ясно, что для доказательства леммы достаточно показать ограниченную обратимость оператора F, при выполнении каждого из условий a) - d). Пусть система $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-полна в Z. Если $\psi^* \in \ker F^*$, то $\forall x\in X$ и $n\in N$ будем иметь: $\psi^*(x\psi_n) = \psi^*(F(x\varphi_n)) = (F^*\psi^*)(x\varphi_n) = 0$. В силу b-полноты $\{\psi_n\}_{n\in N}$, из последнего соотношения следует, что $\psi^* = 0$. Так как $F-$ фредгольмовый оператор, то $\ker F = \{0\}$. Следовательно, по теореме Банаха, оператор F ограниченно обратим. Пусть теперь $\{\psi_n\}_{n\in N}$ $-$ b-минимальна в Z. Возьмем $z\in \ker F$, т.е. $Fz = 0$. Тогда из b-базисности $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ в Z, следует, что $z = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^*(z)\varphi_n$. Поэтому, из $F(x\varphi_n) = x\psi_n$ $\forall x\in X$, $n\in N$ получаем $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^*(z)\psi_n = 0$. Из b-минимальности системы $\{\psi_n\}_{n\in N}$ следует (см. [6]), что $\{\psi_n\}_{n\in N}$ имеет b-биортогональную систему. Тогда $\varphi_n^*(z) = 0$, и тем самым, $z = 0$. Значит, оператор F ограниченно обратим. Аналогичным образом показывается ограниченная обратимость F в случаях c) и d). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть X, Y и Z $-$ B-пространства, система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b-базис в Z, $F \in L(Z)$ $-$ фредгольмовый оператор, система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ такая, что $F(x\varphi_n) = x\psi_n$ $\forall x\in X$, $n\in N$. Тогда $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ образует b-базис в Z, b-изоморфный к системе $\{\psi_n\}_{n\in N}$.

Доказательство. Покажем ограниченную обратимость оператора F. Пусть $\psi^* \in \ker F^*$. В силу того, что $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-базис в Z, то из $\psi^*(x\psi_n) = \psi^*(F(x\varphi_n)) = (F^*\psi^*)(x\varphi_n) = 0$, следует, что $\psi^* = 0$. Поэтому, из фредгольмовости оператора F получаем, что $\ker F = \{0\}$. Значит, оператор F ограниченно обратим. Лемма доказана.

1. Квадратично близкие системы

Пусть X, Y и Z - H-пространства с соответствующими скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_X$ и $(\cdot,\cdot)_Z$. По теореме Рисса $\forall z\in Z$ и $y\in Y$ однозначно соответствует элемент $< z, y >$ из X, такой, что $(z, xy)_Z = (< z, y >, x)_X$ $\forall x\in X$. В силу линейности отображения b и свойства (1), так определенный элемент $< z, y >$ линеен и непрерывен по аргументу $z\in Z$. Фиксируя $y\in Y$, рассмотрим отображение $\omega(y): Z\to X$, определенное выражением $\omega(y)(z) = < z, y >$. Очевидно, что из линейности и непрерывности $<\cdot,\cdot>$ по первому аргументу следует, что $\omega(y) \in L(Z,X)$. Следовательно, $\omega(Y) \subset L(Z,X)$.

Системы $\{y_n\}_{n\in N}$ и $\{y_n^*\}_{n\in N}$ из Y назовем b_Y-биортогональными, если

$$\forall k,n \in N\,,\ x \in X \quad < xy_n, y_k^* > = \ \delta_{nk}\ x\,.$$

При этом систему $\{y_n^*\}_{n\in N}$ назовем b_Y-биортогональной системой к системе $\{y_n\}_{n\in N}$.

Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ с b_Y-биортогональной $\{y_n^*\}_{n\in N}$ назовем b_Y-компактной в Z, если $\omega(y_n^*) \in Q(Z,X)$, $n \in N.$

b-базис $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ в Z назовем b_Y-ортонормированным, если ее b_Y-биортогональная система совпадает с $\{y_n\}_{n\in N}$.

b-базис $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ назовем b-базисом Рисса, если существует ограниченный обратимый оператор $T \in L(Z)$: $T(x\varphi_n) = xy_n$, $n \in N$, где $\{y_n\}_{n\in N}$ b_Y-ортонормированный базис.

Системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ и $\{\psi_n\}_{n\in N}$ из Y называются квадратично близкими, если $\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n - \varphi_n\|_Y^2 < +\infty$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть X, Y и Z - H-пространства, система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b_Y-компактный b-базис Рисса в Z, система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ ω_b-линейно независима и квадратична близкая к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Тогда $\{\psi_n\}_{n\in N}$ образует b-базис в Z, b-изомофный к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$, т.е. b-базис Рисса.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} < z, \varphi_n^* > (\psi_n - \varphi_n)$, $z \in Z$. Покажем сходимость этого ряда. Пользуясь (1) $\forall m \in N$, $k \in N$ получим

$$\left\| \sum_{n=m+1}^{m+k} < z, \varphi_n^* > (\psi_n - \varphi_n) \right\|_Z^2 \le M^2 \left(\sum_{n=m+1}^{m+k} \left\| < z, \varphi_n^* > \right\|_X \|\psi_n - \varphi_n\|_Y \right)^2 \le$$

$$\le M^2 \sum_{n=m+1}^{m+k} \left\| < z, \varphi_n^* > \right\|_X^2 \sum_{n=m+1}^{m+k} \|\psi_n - \varphi_n\|_Y^2\,. \tag{2}$$

Так как системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ и $\{\psi_n\}_{n\in N}$ квадратично близки, $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ образует b-базис Рисса, то из (2) получим сходимость указанного ряда. Определим оператор T по формуле $Tz = \sum_{n=1}^{\infty} < z, \varphi_n^* > (\psi_n - \varphi_n)$, $z \in Z$. Ясно, что, в силу (2), оператор T является равномерным пределом последовательности операторов T_m, определенных формулами $T_m z = \sum_{n=1}^{m} < z, \varphi_n^* > (\psi_n - \varphi_n)$, $z \in Z$. В силу b_Y-компактности $\{\varphi_n\}_{n\in N}$, оператор T_m компактен. В самом деле, пусть $\{z_i\}_{i\in N}$ - ограниченная последовательность в Z. В силу того, что система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ b_Y-компактна, то из последовательности $\{z_i\}_{i\in N}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\tilde{z}_i\}_{i\in N}$ такую, что при каждом $k = 1,....,m$ последовательность $< \tilde{z}_i, \varphi_k^* >$ сходится . Тогда, очевидно, что последовательность $T_m \tilde{z}_i$ также сходится. Следовательно, оператор T компактен, а тогда оператор F, определенный равенством $F = I + T$, является фредгольмовым оператором, здесь I - тождественный оператор в Z. По определению оператора F, для $z \in Z$ имеем: $Fz = \sum_{n=1}^{\infty} < z, \varphi_n^* > \psi_n$. Поэтому, $F(x\varphi_n) = x\psi_n$ $\forall n \in N$, $x \in X$. Покажем, что оператор F обратим. Пусть $Fz = 0$. В силу того, что $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ b-базис, то $z = \sum_{n=1}^{\infty} < z, \varphi_n^* > \varphi_n$. Отсюда, действуя оператором F, получим $\sum_{n=1}^{\infty} < z, \varphi_n^* > \psi_n = 0$. Учитывая ω_b-линейно независимость системы $\{\psi_n\}_{n\in N}$ из последнего равенства получим $< z, \varphi_n^* > = 0$. Тогда $z = 0$. Таким образом, оператор F ограниченно обратим, и тем самым, $\{\psi_n\}_{n\in N}$ образует b-базис Рисса. Теорема доказана.

2. q-близкие системы

Пусть X, Y и Z - B-пространства, с соответствующими нормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ и $\|\cdot\|_Z$.

Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ с b- биортогональной $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z, X)$ назовем $p - b$-бесселевой в Z, если

$$\forall z \in Z \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| y_n^*(z) \right\|_X^p \right)^{1/p} \le M_1 \|z\|_Z .$$

Если $p - b$-бесселевая в Z система $\{y_n\}_{n\in N}$ образует b-базис, то $\{y_n\}_{n\in N}$ назовем $p - b$-базисом в Z.

Системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ и $\{\psi_n\}_{n\in N}$ из Y называются q-близкими, если $\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n - \varphi_n\|_Y^q < +\infty$.

Теорема 2. Пусть X, Y и Z - B-пространства, система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset$

Y образует b-компактный $p-b$-базис $(1<p<+\infty)$ в Z, система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ b-инвариантна в Z и q-близка к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$. Тогда следующие свойства эквивалентны:

a) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-полна в Z;

b) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-минимальна в Z;

c) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ ω_b-линейно независима в Z;

d) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ образует b-базис в Z, b-изоморфный к системе $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Доказательство. Так как системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ и $\{\psi_n\}_{n\in N}$ q-близки, а система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ $p-b$-бесселева в Z, то $\forall z\in Z$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^*(z)\psi_n$ сходится. В самом деле, $\forall z\in Z$, $m\in N$ имеем:

$$\left\|\sum_{n=m+1}^{\infty}\varphi_n^*(z)(\psi_n-\varphi_n)\right\|_Z \le M\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\|\varphi_n^*(z)\right\|_X\left\|\psi_n-\varphi_n\right\|_Y \le M\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\|\varphi_n^*(z)\right\|_X^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\|\psi_n-\varphi_n\right\|_Y^q\right)^{1/q}.$$

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^*(z)\psi_n$ сходится, как сумма сходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^*(z)(\psi_n-\varphi_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^*(z)\varphi_n$. Далее, рассмотрим оператор F, определенный соотношением $Fz=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^*(z)\psi_n$, $z\in Z$. Ясно, что $F=I+T$, где T оператор: $Tz=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^*(z)(\psi_n-\varphi_n)$, $z\in Z$. Для $\forall m\in N$ обозначим через T_m оператор, определенный выражением $T_m z=\sum_{n=1}^{m}\varphi_n^*(z)(\psi_n-\varphi_n)$, $z\in Z$. Очевидно, что оператор T_m компактен. С другой стороны

$$\left\|Tz-T_m z\right\|_Z=\left\|\sum_{n=m+1}^{\infty}\varphi_n^*(z)(\psi_n-\varphi_n)\right\|_Z \le M\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\|\varphi_n^*(z)\right\|_X\left\|\psi_n-\varphi_n\right\|_Y \le$$

$$\le M\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\|\varphi_n^*(z)\right\|_X^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\|\psi_n-\varphi_n\right\|_Y^q\right)^{1/q} \le M_2\left\|z\right\|_Z\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\|\psi_n-\varphi_n\right\|_Y^q\right)^{1/q}.$$

Поэтому $\|T-T_m\|_{L(Z)} \le M_2 \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \|\psi_n - \varphi_n\|_Y^q \right)^{1/q}$. Следовательно, T_m равномерно сходится к T. Таким образом, оператор T компактен, тем самым F фредгольмовый. Так как $F(x\varphi_n) = x\psi_n \ \forall n \in N$, то применяя лемму 1, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

3. b-близкие и $*-b$-близкие системы

Пусть X, Y и Z - B-пространства, системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ и $\{\psi_n\}_{n\in N}$ из Y имеют b-биортогональные системы $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ и $\{\psi_n^*\}_{n\in N}$, соответственно.

Систему $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ назовем b-близкой к системе $\{\psi_n\}_{n\in N}$, если $\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n - \varphi_n\|_Y \cdot \|\varphi_n^*\|_{L(Z,X)} < +\infty$.

Систему $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ назовем $*-b$-близкой к системе $\{\psi_n\}_{n\in N}$, если $\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n^* - \varphi_n^*\|_{L(Z,X)} \|\varphi_n\|_Y < +\infty$.

Теорема 3. Пусть X, Y и Z - B-пространства, система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b-компактный b-базис в Z с b-биортогональной системой $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$, система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ b-инвариантна в Z и b-близка к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Тогда для $\{\psi_n\}_{n\in N}$ следующие свойства эквивалентны:

a) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-полна в Z;

b) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-минимальна в Z;

c) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ ω_b-линейно независима в Z;

d) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ образует b-базис в Z, b-изоморфный к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^*(z)(\psi_n - \varphi_n)$. Тогда в силу условий теоремы оператор T_n, определенный выражением $T_n z = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^*(z)(\psi_k - \varphi_k)$, $z \in Z$ компактен в Z. Следовательно, оператор T: $Tz = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^*(z)(\psi_n - \varphi_n)$ является компактным. Пусть $F = I + T$. Тогда оператор F фредгольмовый и $F(x\varphi_n) = x\psi_n \ \forall n \in N$. Применяя лемму 1, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть X, Y и Z - B-пространства, система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b-базис в Z с b-биортогональной системой $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$, система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ имеет b-биортогональную систему $\{\psi_n^*\}_{n\in N}$ и $*-b$-близка к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$, $\varphi_n^* - \psi_n^* \in Q(Z,X)$, $n \in N$. Тогда $\{\psi_n\}_{n\in N}$ образует b-базис в Z, b-изоморфный к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Доказательство. Для $\forall n \in N$ рассмотрим оператор T_n, определенный соотношением $T_n z = \sum_{k=1}^{n} (\varphi_k^* - \psi_k^*)(z)\varphi_k$, $z \in Z$. Ясно, что $\forall n \in N$ T_n является компактным оператором. Пусть T оператор, заданный выражением $Tz = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^* - \psi_k^*)(z)\varphi_k$, $z \in Z$. В силу $*-b$-близости системы $\{\psi_n\}_{n\in N}$ к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ оператор T корректно определен. Покажем, что $T \in Q(Z,X)$. Линейность оператора T очевидна. Оператор T является равномерным пределом последовательности T_n. Действительно,

$$\|Tz - T_n z\|_Z = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varphi_k^* - \psi_k^*)(z)\varphi_k \right\|_Z \le M \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\|(\varphi_k^* - \psi_k^*)(z)\right\|_X \|\varphi_k\|_Y \le M \|z\|_Z$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi_k^* - \psi_k^*\|_{L(Z,X)} \|\varphi_k\|_Y .$$

Отсюда $\|T - T_n\|_{L(Z)} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi_k^* - \psi_k^*\|_{L(Z,X)} \|\varphi_k\|_Y$. Поэтому, оператор T компактен. Обозначим через F оператор: $F = I + T$. Следовательно, оператор F фредгольмовый и $Fz = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^*(z)\varphi_k$, $z \in Z$. Поскольку, $F(x\psi_n) = x\varphi_n$ $\forall n \in N$, $x \in X$, то применяя лемму 2, получим доказательство теоремы. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве// Учёные записки МГУ, 1951, 4:148, с. 69-107.
2. Singer I. Bases in Banach spaces I. SVBH, New York, 1970, 672 p.
3. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965, 448 с.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965, т.1, 615 с.
5. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов, М., ГИФМЛ, 1958, 508 с.
6. Билалов Б.Т., Велиев С.Г. Некоторые вопросы базисов. Баку: Элм, 2010, 304 с.
7. Bilalov B.T. Bases and tensor product. Trans. of NAS Azer., 2005, v.XXV, № 4, p. 15-20.
8. Билалов Б.Т., Гусейнов З.Г. О результатах Н.К. Бари относительно бесселевых, гильбертовых систем и базисах Рисса // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Труды меж. конф. Стерлитамак, 2008, т.II, с. 31-35.
9. Ismailov M.I. b-Hilbert systems // Proceedings of IMM of NAS of Azerb. Volume XXX (XL), 2010, p. 119-122.

BANAX FƏZALARINDA b - BAZİSƏ YAXIN SİSTEMLƏRİN EKVİVALENT XASSƏLƏRİ HAQQINDA

M.İ.İSMAYILOV

XÜLASƏ

İşdə müəyyən mənada yaxın sistemlərə baxılır. Hilbert və Banax fəzalarında yaxın sistemlər haqqında bəzi məlum nəticələr ümumiləşdirilmişdir. b -bazisə yaxın sistemin ona izomorf b -bazis olması üçün şərtlər tapılmışdır. Xüsusi halda, Riss bazisləri haqqında məlum nəticənin ümumiləşməsi alınmışdır.

Açar sözlər: b -bazis, b -minimallıq, b -tamlıq.

ON EQUIVALENT PROPERTIES OF THE SYSTEMS CLOSE TO b -BASIS IN BANACH SPACES

M.I.ISMAYILOV

SUMMARY

In the paper, the close systems in the certain are considered. Generalizations of some known results on close systems in Hilbert and Banach spaces are established. The conditions under which the system close to b -basis forms a b -basis isomorphic to the given one are obtained. In particular, the known results on Riesz bases are generalized.

Key words: b-basic, b-minimality, b-completeness.

Поступила в редакцию: 16.12.2010 г.
Принято к печати: 03.10.2011 г.